1. Sean z, w números complejos distintos de cero. Estúdiese la validez de cada una de las siguientes igualdades:

$$\textbf{a)}\ \log(zw) = \log(z) + \log(w); \quad \textbf{b)}\ \log(e^z) = z; \quad \textbf{c)}\ (z^2)^{1/2} = z.$$

2. Sean $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, y sea Ω el dominio obtenido al suprimir del plano complejo el segmento que une los puntos a y b.

   a) Probar que la función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definida para todo $z \in \Omega$ por

   $$f(z) = \log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$$

   es holomorfa en Ω. Deducir que para todo camino cerrado γ en Ω se tiene que

   $$\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,dz = \int_\gamma \frac{1}{z-b}\,dz$$

   b) Obtener, para el caso en que $a = 1$, $b = i$, el desarrollo en serie de potencias de f centrado en cero y calcular el radio de convergencia de la serie y el radio del más grande disco donde dicho desarrollo es válido.

3. Sea f una función entera no constante y supongamos que hay un número complejo $\alpha \neq 1$ tal que $f(z) = f(\alpha z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

   a) Prueba por inducción (una línea) que $f(z) = f(\alpha^n z)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y todo $z \in \mathbb{C}$. Deduce que necesariamente $|\alpha| = 1$.

   b) Considera la función $f(z) - f(\alpha)$ y usa el principio de identidad para justificar que el conjunto $\{\alpha^n : n \in \mathbb{Z}\}$ es finito.

   c) Sea m el menor número natural tal que $\alpha^m = 1$ (la existencia de ese m se sigue del apartado anterior). Derivando la igualdad $f(z) = f(\alpha^n z)$, deduce que $f^{(n}(0) = 0$ si n no es múltiplo de m. Finalmente, escribe el desarrollo en serie de Taylor de f centrado en 0 y justifica que hay una función entera g tal que $f(z) = g(z^m)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

4. Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{\Omega}$, holomorfa en Ω y que tiene límite finito en infinito. Justifíquese que la función $|f|$ alcanza un máximo absoluto en un punto de la circunferencia unidad y que, si f no es constante, la función φ definida para todo $r > 1$ por

   $$\varphi(r) = \text{máx}\{|f(z)| : |z| = r\}$$

   es estrictamente decreciente.